3.2. Решение рациональных, иррациональных уравнений и неравенств

Цель:

- вспомнить решение рациональных и иррациональных уравнений и неравенств;

Задание для обучающихся:

- Разобраться с примерами (слайды 5, 6, 8, 10)
- Решить в тетради примеры со слайдов 7, 9, 10

(1 вариант – нечетные номера, 2 вариант – четные номера)

(НА ОЦЕНКУ 5 – 16 ПРИМЕРОВ; НА ОЦЕНКУ 4 – 12 ПРИМЕРОВ, НА ОЦЕНКУ 3 – 9 ПРИМЕРОВ.)

Примеры должны быть из разных тем!!!!!!

Рациональные уравнения

Алгоритм решения рациональных уравнений:

1. Все выражения содержащиеся в уравнении, перенести в левую сторону от знака равно.

2. Преобразовать это часть уравнения к алгебраической дроби:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0$$

3. Приравнять полученный числитель к нулю, то есть решить уравнение p(x)=0.

4. Приравнять знаменатель к нулю, и решить полученное уравнение. Если корни знаменателя совпали с корнями числителя, то их следует исключить из ответа.

Решение дробно-рациональных неравенств методом интервалов

- **1. Привести данное неравенство к виду** $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$
- **2. Разложить числитель и знаменатель дроби на множители;**
- **3. Нанести на числовую ось числа, при которых каждый множитель равен нулю и разделить числовую ось на промежутки;**
- **4.Изобразить выбитыми те точки, которые не являются решением неравенства;**
- **5. Выяснить знаки промежутков;**
- **6. Выбрать ответ.**

Рациональные уравнения

Рассмотрим примеры решения рациональных уравнений.
Пример 1. Решить уравнение:

$$\frac{5x-3}{x-3}=\frac{2x-3}{x}$$

Решение. Перенесем все выражения в левую часть:

$$\frac{5x-3}{x-3}-\frac{2x-3}{x}=0$$

Если бы нам были представлены обычные числа, в левой части уравнения, то мы бы привели две дроби к общему знаменателю, давайте так и поступим:

$$\frac{(5x-3)\cdot x}{(x-3)\cdot x}-\frac{(2x-3)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot x}=\frac{5x^2-3x-(2x^2-6x-3x+9)}{(x-3)\cdot x}$$

$$=\frac{3x^2+6x-9}{(x-3)\cdot x}=\frac{3(x^2+2x-3)}{(x-3)\cdot x}$$

Рациональные уравнения

Получили уравнение:

$$\frac{3(x^2+2x-3)}{(x-3)\cdot x}=0$$

Дробь равна нулю, тогда и только тогда, когда числитель дроби равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Тогда отдельно приравняем числитель к нулю и найдем корни числителя.

$$3(x^2+2x-3)=0$$

$$x^2+2x-3=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot(-3)}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=1;-3$$

Решение дробно-рационального неравенства

Пример 1

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4}\geq 0$$

Разложим на множители каждый трёхчлен.

Для этого приравняем их к нулю и найдём корни

$x^2+2x-3=0$

$x_1=-3$

$x_2=1$

$(x+3)(x-1)$

$x^2-3x-4=0$

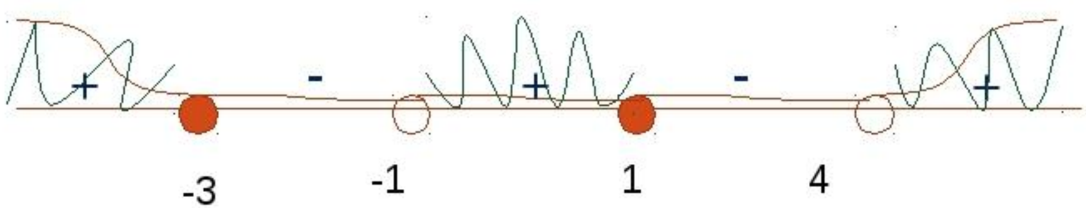
$x_1=4$

$x_2=-1$

$(x-4)(x+1)$

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)}\geq 0$$

Знаменатель не равен нулю, поэтому точки 4 и -1 не закрашены



Ответ: x ≤ - 3, -1 <x ≤ 1, x > 4

1. Решите уравнения:

А) $$\frac{5}{x-2}=\frac{3}{x-1}$$

Б) $$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{x^2+5x+6}$$

2. Решите неравенство:

$$x(x+1)<2(1-2x-x^2)$$

Примеры рациональных неравенств.

- $\frac{x-3}{x-2}>0,\qquad \frac{x^2-3x-3}{x^2-2x+2}>0,$
- $\frac{(x-3)(x-4)}{x-2}<0,\qquad \frac{x}{2x+3}>\frac{1}{x},$
- $\frac{x^3-3x^2-4x}{(x+1)(x-2)}<\frac{3(x^2-3x-4)}{x^2-x-2}$

Решение иррациональных уравнений и неравенств

Иррациональные уравнения:

1) $\sqrt{6x-4}=1$

2) $\sqrt{x^2-7x-9}=3$

3) $\sqrt{3x-1}=\sqrt{x-5}$

4) $\sqrt{x^2-3x}=x+3$

5) $x-\sqrt{x}-2=0$

Карточка №5. Иррациональные неравенства.

Правила.

Иррациональные неравенства – это неравенства, содержащие неизвестное под знаком корня.

1. Неравенство вида: $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

2. Неравенство вида: $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

Образец.

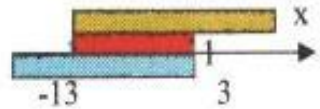
Пример 1: Решить неравенства:

$\sqrt{3 - x} < -4$ - левая часть всегда положительна, а это значит, что решений нет.

Ответ: не имеет решений.

Пример 2: $\sqrt{3 - x} < 4$

$$\begin{cases} 3 - x < 16 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -13 \\ x \leq 3 \end{cases}$$



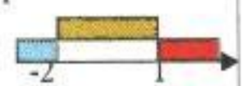
Ответ: $-13 < x \leq 3$.

Пример 3: $\sqrt{3 - x} > -4$ – левая часть всегда больше правой, т.к. $x \leq 3$, то неравенство верно при всех значениях из ОДЗ.

Ответ: $x \leq 3$.

Пример 4: $\sqrt{x + 3} < x + 1$

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ x + 3 < (x+1)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x \geq -3 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases} \quad x > -1$$

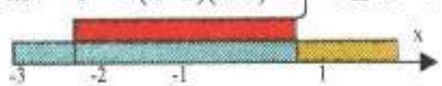


$$\begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \\ x < -2 \end{cases}$$

Ответ: $x > 1$.

Пример 4: $\sqrt{x + 3} > x + 1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ x + 3 > (x+1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -3 \\ x > -1 \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ (x+2)(x-1) < 0 \end{cases} \quad -3 \leq x < -1$$



$-1 \leq x < 1$

Задания.

I. Решить неравенства:

1. $\sqrt{3x - 2} < -2$
2. $\sqrt{x - 2} < 5$
3. $\sqrt{x - 3} < 2$
4. $\sqrt{3 - 2x} \leq 7$
5. $\sqrt{4 - 5x} \leq 8$
6. $\sqrt{x + 2} \geq 3$
7. $\sqrt{x - 7} \geq 2$
8. $\sqrt{7 - 3x} > 5$
9. $\sqrt{6 - 6x} > 6$
10. $\sqrt{2x + 1} > -3$
11. $\sqrt{6 - 5x} > -0{,}5$
12. $\sqrt{x + 8} < x + 1$
13. $\sqrt{x - 3} < x - 5$
14. $\sqrt{x - 2} \leq x - 2$
15. $\sqrt{x + 4} \leq x + 4$
16. $\sqrt{x + 2} > \sqrt{4 - x}$
17. $\sqrt{3 + x} \geq \sqrt{x + 1}$