Системы счисления

С самого раннего детства нас учат считать, чтобы мы умели оценивать количество. Какая разница между числом и количеством? Одно и то же количество может быть выражено разными числами. Числа записываются с помощью цифр. Не следует путать понятия: «цифра», «число», «количество». Использовать текстовую информацию позволяет алфавит, а количественную — системы счисления.

Система счисления — это система отображения любого числа с помощью ограниченного количества условных знаков, называемых цифрами.

Давайте докажем, что цифра — это условный знак для записи чисел. Возьмем число 8 136 547. Теперь представим себе, что цифра 3 обозначается как , цифра 4 — как , цифра 5 — как , остальные же цифры остались прежними. При таких обозначениях цифр наше число будет выглядеть так:

Как вы думаете, изменилось ли количество, которое определяется этим числом? Конечно, нет. Изменился вид самого числа, да и то потому, что изменились условные знаки, называемые цифрами.

Трудно определить, сколько всего существует систем счисления. Скорее всего, бесконечное множество. Тем не менее их можно разделить на две группы: позиционные и непозиционные. В ***позиционных системах счисления*** вес цифры зависит от места (позиции), которое она занимает в числе.

Мы помним, что в записи числа используются позиции (разряды) единиц, десятков, сотен, тысяч, десятков тысяч, т. е. число можно представить в следующем виде:

$$35\,876 = 6 \cdot 1 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 100 + 5 \cdot 1000 + 3 \cdot 10\,000.$$

Цифра 5, входящая в число 35 876, обозначает пять тысяч, потому что она находится именно в той позиции, в которой указывается количество тысяч, или, иными словами, именно нахождение в данной позиции определяет ее вес. В числе 68 952 тоже есть цифра 5, но ее вес, определяемый позицией в этом числе, составляет пять десятков.

В ***непозиционных системах счисления*** такой закономерности нет, т. е. вес цифры не зависит от ее позиции в числе. Классический пример непозиционной системы счисления — римская система, которая используется до сих пор, правда в основном для нумерации.

Рассмотрим пример из двух римских чисел: и . Левая цифра в обоих числах — единица. В первом числе она имеет вес +1, а во втором числе — -1.

Как вы понимаете, такие системы счисления имеют право на существование, но по причине отсутствия четких весовых закономерностей они неприменимы для компьютерной обработки информации.

Особый интерес из позиционных систем для нас представляют такие, веса которых являются членами геометрической прогрессии.

Рассмотрим несколько рядов чисел:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048 …

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19 683, 59 045 …

1, 4, 16, 256, 1024, 4096, 16 384, 65 536, 262 144 …

1, 5, 25, 125, 625, 3125, 15 625, 78 125, 390 625 …

Что общего в этих рядах чисел? Каждое следующее число в них получается из предыдущего путем умножения его на конкретное число. В первом ряду это число 2, во втором — 3, в третьем — 4, в четвертом — 5 и т. д.

Такой ряд чисел называется **геометрической прогрессией**, сами числа ряда — это **члены геометрической прогрессии**, а то число, умножая на которое предыдущий (или n-й) член прогрессии, мы получаем последующий, или $(n + 1)$-й, является **знаменателем геометрической прогрессии**, обозначим его p.

Давайте теперь представим десятичное число 64 572 187 в весовом виде:

$$64\,572\,187 = 7 \cdot 1 + 8 \cdot 10 + 1 \cdot 100 + 2 \cdot 1\,000 + 7 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 100\,000 + 4 \cdot 1\,000\,000 + 6 \cdot 10\,000\,000$$

и в виде таблицы по весам позиций и цифрам в этих позициях:

Вес позиции	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000
Цифра	7	8	1	2	7	5	4	6

Видно, что веса привычной нам десятичной системы счисления являются членами геометрической прогрессии, знаменателем такой прогрессии выступает число 10, т. е. $p = 10$, оно называется **основанием системы счисления**, а сама система называется ***p*-ричной системой счисления**. Запишем теперь число из таблицы с использованием степеней числа 10 — основания десятичной системы счисления:

$$64\,572\,187 = 7 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^7. \tag{2.1}$$

Теперь попробуем записать представления числа по степеням основания p-ричной системы счисления в общем виде:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p^1 + a_0 p^0, \tag{2.2}$$

где a_i — цифра, находящаяся в позиции, имеющей вес $i = n, n - 1, n - 2, \ldots, 2, 1, 0$ соответственно; $n, n - 1, n - 2, \ldots, 2, 1, 0$ — веса позиций, или степень, в которую возводится p в данной позиции; p — основание системы счисления.

Но ведь число может иметь и дробную часть, а веса позиций в дробной части — числа отрицательные. Рассмотрим **пример десятичного дробного числа** 0,874562. Веса позиций, если идти от десятичной запятой вправо, таковы:

Если использовать десятичные дроби, то **веса будут выглядеть** следующим образом:

$$0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ 0{,}00001;\ 0{,}000001,$$

или то же самое с использованием **отрицательных степеней числа 10**:

$$10^{-1};\ 10^{-2};\ 10^{-3};\ 10^{-4};\ 10^{-5};\ 10^{-6}.$$

Значит, аналогично записи (2.1) предложенное **дробное число можно представить так**:

$$8 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-6}.$$

Следовательно, **выражение (2.2)** для чисел, имеющих как целую, так и дробную часть, **примет следующий вид**:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p^1 + a_0 p^0 + a_{-1} p^{-1} + a_{-2} p^{-2} + \ldots + a_{-m} p^{-m}. \quad (2.3)$$

Мы говорили о том, что любая **система счисления использует ограниченное число условных знаков — цифр**. Оказывается, что количество этих знаков **равно основанию системы *p***. И действительно, в десятичной системе их десять, это — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. А сколько их должно быть, например, в шестеричной системе счисления, т. е. когда $p = 6$. Цифр будет шесть, это — 0, 1, 2, 3, 4, 5. А в восьмеричной? Цифр будет восемь, это — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Сформулируем правило: **количество цифр в *p*-ричной системе счисления равно *p***, причем это цифры от 0 до $(p - 1)$.

Как быть, если основание системы больше 10, например 12 или 16?

В этом случае на помощь приходят буквы латинского алфавита: A, B, C, D и т. д. Правда, в этом случае они называются уже не буквами, а цифрами. Итак, основание системы счисления может быть любым, все системы — равноправны, но тем не менее мы используем десятичную систему счисления. Причина проста: на руках 10 пальцев — это, наверное, и есть наш первый «вычислитель».

Особо мы будем еще рассматривать **двоичную систему счисления**, поскольку она более удобна для использования в компьютерах. Мы уже говорили, что один двоичный разряд, который может содержать либо «0», либо «1», иначе называется битом, т. е. порция информации в 1 бит — это и есть либо «0», либо «1».

Основным элементом, который хранит 1 бит информации в компьютере, является **триггер**. Для хранения нескольких бит информации используются столько элементов, сколько бит надо хранить. Как правило, эти элементы и есть триггеры, в этом случае они образуют интегральную схему, которая называется **регистром**. Если попытаться дать более строгое определение, то регистр — это совокупность элементов, которые могут принимать, хранить и выдавать информацию в компьютере. Как мы узнаем позже, регистры играют очень большую роль в работе микропроцессора компьютера и других его частей.

Вопросы и задания

1. Что называется системой счисления?
2. Приведите доказательства того, что цифра не более чем условный знак. Какие различия между понятиями: «цифра», «число», «количество»? Обоснуйте свое мнение.
3. Почему десятичная система счисления наиболее привычна для нас?
4. Сколько цифр должно быть в семеричной системе счисления? Может ли цифра 8 входить в состав восьмеричной системы счисления?

5. Что такое вес позиции в системе счисления? Имеется десятичное число 324 512. Какой вес имеет каждая позиция?